Оглавление

Глава 1

Пчёлы (8-2)

К чему всё это?

1. Найдите остаток от деления
(a) 5^{102} на 103; **(b)** 3^{104} на 103; **(c)** 8^{900} на 29.

2. Докажите, что $(3^{3000} - 1)$ делится на 1001.

3. Найдите остаток от деления $14^{14^{14}}$ на 17.

4. Найдите остаток от деления $15^{10!}$ на 101.

5. Найдите остаток от деления числа, состящего из 19 девяток на 19.

6. Докажите, что для любого числа a, не делящегося на 17, одно из чисел (a^8-1) и (a^8+1) делится на 17.

7. С помощью малой теоремы Ферма докажите, что для любого простого $p \neq 2, 5$ найдется число из одних единиц, кратное p.

source:algebra/number-theory/fermats-theorem-g8r2.tex

НОД и НОК

Определение. *Наибольшим общим делителем* нескольких натуральных чисел называется наибольшее число, на которое делится каждое из этих чисел. Обозначение НОД$(a, b) = (a, b)$.

Определение. Натуральные числа называются *взаимно простыми*, если у них нет общих делителей, кроме 1. То есть числа a и b взаимно просты, если $(a, b) = 1$.

Определение. *Наименьшим общим кратным* нескольких натуральных чисел называется наименьшее число, которое делится на каждое из этих чисел. Обозначение НОК$(a, b) = [a, b]$.

1. Докажите, что НОК$(a, b) \cdot$ НОД$(a, b) = ab$.

2. Петя посчитал НОК всех чисел от 1 до 1000, а Вася НОК всех чисел от 501 от 1000. У кого результат получился больше и во сколько раз?

3. Найдите наибольшее трехзначное число n, для которого НОД$(n, 1080) = 36$.

4. Даны шесть натуральных чисел. Для каждой пары чисел посчитали их НОД. Могут ли среди этих НОДов встречаться все натуральные числа от 1 до 15?

5. У Саши есть клетчатый лист бумаги размера 20×75. Каждую минуту Саша отрезает от этого листа квадрат наибольшего возможного размера и кладет на стол. Какая сторона будет у самого маленького квадрата на столе?

6. По окружности радиуса 40 катится колесо радиуса 18. В колесо вбит гвоздь, который ударяясь об окружность, оставляет на ней отметки. Сколько всего таких отметок оставит гвоздь на окружности? Сколько раз прокатится колесо по всей окружности, прежде чем гвоздь попадет в уже отмеченную ранее точку?

7. В прямоугольнике с целыми сторонами m и n, нарисованном на клетчатой бумаге, проведена диагональ. Через какое число узлов она проходит? На сколько частей эта диагональ делится линиями сетки?

Алгоритм Евклида

Упражнение. Докажите следующие свойства:
(a) Если $a \geqslant b$, то НОД$(a, b) =$ НОД$(b, a - b)$.
(b) Если $a = kb + r$, то НОД$(a, b) =$ НОД(b, r).
(c) Если $b \mid a$, то НОД$(a, b) = b$.

Алгоритм Евклида. Для того, чтобы найти НОД двух чисел a и b, нужно выполнить последовательно несколько делений с остатком:

$$a = bq_1 + r_1, \quad b = r_1q_2 + r_2,$$
$$r_1 = r_2q_3 + r_3, \quad r_2 = r_3q_4 + r_4,$$
$$\ldots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, \quad r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0\,.$$

На каждом шаге предыдущий делитель делится с остатком на предыдущий остаток. Так продолжается до тех пор, пока на каком-то шаге остаток не станет равен 0. Последний ненулевой остаток равен НОД(a, b).

8. Найдите, используя алгоритм Евклида:

(a) НОД$(546, 452)$;

(b) НОД$(257, 646)$;

(c) НОД$(\underbrace{11\ldots11}_{n}, \underbrace{11\ldots11}_{m})$.

9. Найдите НОД$(2^{80}-1, 2^{60}-1)$.

10. Докажите, что для каждого натурального n дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ несократима.

11. Найдите НОД$(11!-20, 10!-20)$.

source:algebra/number-theory/gcd-lcm-and-euclids-algorithm-g8r2.tex

Сравнения по модулю — 2

1. Докажите, что не имеет решений в целых числах уравнение:
(a) $x^2 + y^2 = 1703$; **(b)** $15x^2 - 7y^2 = 9$; **(c)** $x^2 - 7y^2 = 5$.

2. Известно, что $a^2 + b^2$ делится на 7. Докажите, что это выражение делится на 49.

3. Докажите, что квадраты натуральных чисел по модулю n дают не больше $(n+1)/2$ различных остатков.

4. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не может быть полным квадратом.

5. Решите в натуральных числах уравнение
(a) $2^n + 7 = k^2$; **(b)** $x^2 + 2015 = y^2$; **(c)** $3^n - 2^m = 1$.

6. На какое количество нулей может оканчиваться число $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$?

7. Решите в целых числах уравнение $x^5 + y^5 + z^5 + t^5 = 82$.

source:algebra/number-theory/modular-arithmetic-g8r2-2.tex

Классическая комбинаторика

1. У Остапа Бендера есть десять поддельных паспортов. В целях конспирации очередному милиционеру он показывает не тот паспорт, который показывал прошлому, и не тот, который позапрошлому. Сколькими способами он может пообщаться с десятью стражами порядка?

2. Сколькими способами может выстроиться в очередь класс из 20 человек при условии, что двоечник Петя стоит в очереди раньше отличницы Кати?

3. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых *найдется* хотя бы одна четная цифра?

4. Сколькими способами 24 человека могут распределиться в 3 очереди по 8, если Петя, Катя и Сара должны стоять в разных очередях?

5. Сколькими способами можно расставить в очередь 20 детей, чтобы между Петей и Катей стояло ровно 4 человека?

6. Сколькими способами в классе из 20 человек выбрать две непересекающиеся группы?

7. Сколькими способами можно расставить 20 детям в классе баллы за ЕГЭ (от 0 до 100), чтобы *нашелся* ученик, набравший больше 90 баллов?

8. Сколькими способами можно выставить от 0 до 100 баллов за ЕГЭ отличнице Кате и двоечнику Пете, чтобы у Кати было баллов больше, чем у Пети и не меньше 50?

9. Сколькими способами можно выстроить класс из 20 человек в хоровод, чтобы Петя был на одинаковом расстоянии от Кати и Сары?

10. А если человек 21?

11. Сколькими способами можно выстроить класс из 20 человек в очередь, чтобы Петя находился на одного человека ближе к Кате, чем к Саре?

12. Сколькими способами можно разрезать палку длины 2014 на 3 части так, чтобы потом из этих частей можно было бы сложить невырожденный треугольник?

source:combinatorics/counting-g8r2/1.tex

Ц. из N, пока!

Через C_n^k обозначается количество способов выбрать k предметов из n. Верна следующая формула: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1. Какое из чисел C_{500}^{100} и C_{500}^{200} больше и почему?

2. Сколькими способами можно выставить баллы за ЕГЭ (от 0 до 100) так, чтобы у Кати было баллов больше, чем у Сары, а у Сары — больше, чем у Пети?

3. В тесте на каждый из 20 вопросов имеется 4 варианта ответа. Талантливый мальчик Петя Торт хочет ответить наобум, но так, чтобы ответов каждого типа было одинаковое количество. Сколькими способами он может это сделать?

4. Сколько существует слов из 16 букв А и 7 букв Б таких, чтобы подряд всегда шло четное число букв А? В частности, ААБББААББ можно, а АААБББАББ — нельзя.

5. В классе 10 хулиганов и 15 интеллигентов. Сколькими способами можно выстроить их в шеренгу так, чтобы хулиганы не стояли рядом?

6. Глеб Александрович хочет выдать некоторым из 12 школьников в группе по конфете, а некоторым шоколадку. Сколькими способами он может это сделать, чтобы оба ништяка получили ровно пять человек?

7. **(a)** Сколькими способами можно выбрать из 19 предметов больше половины?
(b) А из 20?

8. Сколько клетчатых прямоугольников содержит доска 8×8?

9. В выпуклом n-угольнике проведены все диагонали, и никакие три из них не пересекаются в одной точке. Сколько получилось точек пересечения?

source:combinatorics/counting-g8r2/2.tex

Чтобы вычесть что-то ненужное, нужно прибавить что-то ненужное!

1. В летнем лагере 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?

2. Сколькими способами можно рассадить 10 сторожей по трем сторожкам, чтобы ни одна сторожка не пустовала?

3. А по четырем?

4. Сколькими способами можно рассадить 10 партизан по двум землянкам, чтобы в каждой землянке было хотя бы два партизана?

5. Среди животных в саванне некоторые умные, а некоторые красивые. Известно, что 20% умных еще и красивы, а 25% красивых еще и умны. Только заяц и ишак не являются ни умными, ни красивыми. Сколько всего животных, если их от 20 до 30?

6. В парламенте Табулистана есть три фракции, в которых 150, 100 и 50 человек соответственно. Сколькими способами можно выбрать в комитет по культуре 20 человек, чтобы от каждой фракции было хотя бы по одному человеку?

7. *Задача Льюиса Кэррола.* В одном жестоком бою из 100 пиратов 70 потеряли ногу, 75 — руку, 80 — глаз, 85 — ухо. Доказать, что как минимум 10 человек потеряли и руку, и ногу, и глаз, и ухо.

source:combinatorics/counting-g8r2/inclusion-exclusion.tex

Зацикливания

1. Кубик Рубика вывели из исходного состояния некоторой последовательностью поворотов граней. Докажите, что если повторять эту последовательность поворотов достаточно долго, то кубик в конце концов вернется в исходное состояние.

2. Рассмотрим последовательность цифр, где каждая следующая равна последней цифре произведения двух предыдущих. Докажите, что

(a) эта последовательность периодична;

(b) ее период не больше 26;

(c) ее период не больше 17.

3. Докажите, что последовательность остатков при делении $16^n + 26^n$ на 2015 периодична.

4. Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ образована по закону: $a_0 = a_1 = 1$ и $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} + 1$. Делится ли число a_{2015} на 4?

5. Числа Фибоначчи задаются формулами $f_1 = f_2 = 1$ и $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Докажите, что последовательность последних цифр этих чисел периодична, причем не имеет предпериода.

6. Последовательность a_n определена формулами: $a_1 = a$ и $a_{n+1} = a_n + \ldots + a_1$. Периодична ли последовательность остатков от деления a_n на 27?

7. Докажите, что цифры после запятой у числа a/n образуют периодическую последовательность.

8. Докажите, что для любого m найдется число Фибоначчи, делящееся на m.

source:combinatorics/cycling-g8/r2.tex

Индукция-1

1. В квадрате 1024×1024 вырезали одну клетку. Докажите, что оставшееся можно разрезать на уголки из трех клеток.

2. Имеется очень много купюр достоинства 3 и 5 тугриков. Докажите, что этими купюрами можно выдать любое количество тугриков больше восьми.

3. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество квадратов больше 6.

4. *Блинная сортировка.* На полке стоит 55 томов собрания сочинений В. И. Ленина. За раз разрешается взять несколько подряд идущих томов и переставить их в обратном порядке. Докажите, что такими операциями можно расставить тома по порядку.

5. Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении $n : (n+1)$, где n — любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы разделить отрезок на любое количество одинаковых частей. Прав ли он?

6. Докажите, что для всех натуральных n число, записываемое 3^n единицами, делится на 3^n.

7. Докажите, что
(a) любое натуральное число единственным образом представимо в виде суммы некоторых из чисел $1, 2, 4, \ldots, 2^n, \ldots$.
(b) любое целое число единственным образом представимо в виде суммы некоторых из чисел $1, -2, 4, \ldots, (-2)^n, \ldots$. Попробуйте придумать хотя бы два способа сделать переход индукции.

8. Плоскость разбита прямыми на области. Докажите, что области можно покрасить в два цвета так, чтобы граничащие области были разного цвета.

9. Несколько человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трех людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это всегда можно сделать.

source:combinatorics/induction-g8/1/r2.tex

Индукция-2: индукция и алгоритмы

1. На столе стоят 1024 стаканов с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнять в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно добиться того, чтобы во всех стаканах было поровну воды.

2. Полк солдат подошел к реке. По реке катались на лодке два мальчика. Лодка выдерживает одного солдата или двух мальчиков. Как всем солдатам переправиться на другой берег и вернуть лодку мальчикам?

3. В компании из k человек, где $k > 3$, у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $(2k - 4)$ разговора все они могут узнать все новости.

4. Даны n карточек. На обеих сторонах каждой карточки написано по одному из чисел $1, 2, \dots, n$, причем так, что каждое число встречается на всех n карточках ровно два раза. Доказать, что карточки можно разложить на столе так, что сверху окажутся все числа $1, 2, \dots, n$.

5. Есть компания из $2n$ человек. Докажите, что их можно перезнакомить так, чтобы у двоих было ровно по одному знакомому, у двоих — ровно по 2, …, у двоих — ровно по n.

6. На полке стоит 55 томов собрания сочинений В. И. Ленина. За раз разрешается сделать любое из двух действий:
   (1) поменять местами первые два тома на полке;
   (2) переставить последний том в начало.
   Докажите, что таким образом можно упорядочить все творческое наследие дедушки Ленина.

7. В шеренгу выстроилось n солдат. За одну операцию можно поменять любых двух солдат местами, после чего делается групповая фотография. Докажите, что за $n!$ операций можно получить все возможные фотографии.

source:combinatorics/induction-g8/2/r2.tex

Моноварианты

1. В стране несколько городов, попарные расстояния между которыми различны. Путешественник отправился из города A в самый удаленный от него город B, оттуда — в самый удаленный от него город C, и т. д. Докажите, что если C не совпадает с A, то путешественник никогда не вернется в A.
2. В каждой из n стран правит либо партия правых, либо партия левых. Каждый год в одной из стран, A, может поменяться власть. Это может произойти в том случае, если в большинстве граничащих со страной A стран правит не та партия, которая правит в стране A. Докажите, что смены правительств не могут продолжаться бесконечно.
3. На плоскости отмечено 200 точек. Каждая из точек соединена отрезком ровно с одной другой. За один раз Юлик может стереть пересекающиеся отрезки AB и CD и провести вместо них AC и BD. Докажите, что он не сможет промышлять этим вечно.
4. По кругу стоят натуральные числа. Каждую минуту между каждыми двумя соседними числами записывают их НОД, после чего исходные числа стираются. Докажите, что однажды все числа станут равны.
5. В одной школе в 11Е и 11Ж классах учится по 25 человек. Каждую день один человек из двух классов может перейти в другой при условии, что в своем классе у него друзей меньше, чем в другом. Докажите, что однажды переходы прекратятся, причем произойдет это раньше, чем через 1000 дней.
6. На бесконечном листе клетчатой бумаги несколько клеточек закрашено в черный цвет. Каждую секунду клетка окрашивается в тот цвет, которого больше всего среди ее соседей справа, слева и сверху. Докажите, что однажды вся плоскость станет белой.
7. На доске написано несколько чисел. Каждую минуту Юлик вместо двух из них пишет их НОД и НОК. Докажите, что начиная с некоторого момента ничего не будет меняться.
8. По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет свое мнение, а остальные — не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.

source:combinatorics/monovariant-g8/r2.tex

Вступительная олимпиада

Довывод

1. Отец и сын катаются на коньках по кругу. Время от времени отец обгоняет сына. После того, как сын переменил направление своего движения на противоположное, они стали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз отец быстрее сына?

2. В гости к Андрею пришло 10 человек, у всех разный размер ноги. Они уходят по одному, причем каждый надевает произвольную пару обуви, в которую может влезть. В какой-то момент оказалось, что больше никто уйти не может, так как имеющаяся обувь слишком мала для всех оставшихся. Какое наибольшее число человек могло остаться?

3. У двух равнобедренных треугольников равны основания. Более того, оказалось, что их вершины лежат все на одной окружности. Обязательно ли эти треугольники равны?

4. Докажите, что $2^{27} + 3^{27}$ делится на 5.

5. «Крокодилом» называется фигура, ход которой заключается в прыжке на клетку, в которую можно попасть сдвигом на одну клетку по вертикали или горизонтали, а затем на N клеток в перпендикулярном направлении (при $N = 2$ «крокодил» — это шахматный конь). При каких N «крокодил» может пройти с каждой клетки бесконечной шахматной доски на любую другую?

Вывод

6. Какое наибольшее количество чисел от 1 до 2015 можно выбрать так, чтобы у любых двух выбранных чисел наибольший общий делитель был больше 1?

7. На дно горизонтальной прямоугольной коробки кладут бутылки (тоже горизонтально). Рис. 2.2. В коробке достаточно места, чтобы в нижнем ряду поместилось три бутылки, но не хватает места для четырех. Поверх этих трех бутылок во второй ряд естественным образом кладут две бутылки. В третий ряд кладут три бутылки. Докажите, что центры бутылок третьего слоя лежат на одной прямой.

8. На столе стоят n ящиков, занумерованных числами от 1 до n. По ним произвольным образом разложено n шариков. За ход разрешается сделать следующее: если в одном из крайних ящиков есть шарик, то можно переложить его в соседний ящик; если в одном из остальных ящиков есть хотя бы два шарика, то один можно переложить в соседний слева ящик, а другой — в соседний справа. Докажите, что вне зависимости от исходного расположения шариков, можно сделать так, чтобы в каждом ящике лежал ровно один шарик.

source:olympiad/g8-intro.tex

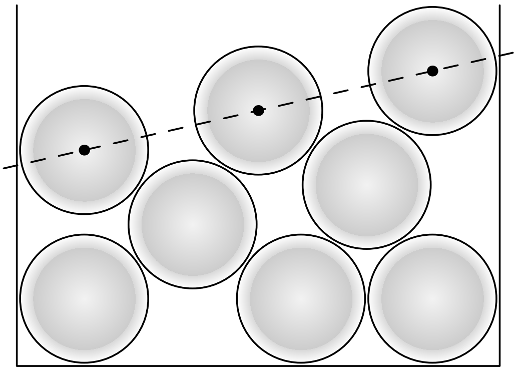


Рис. 1.1: к условию задачи 7

Глава 2

Шмели (8-1)

КТО и Вильсон

Упражнение 1. Найдите наименьшее натуральное число, дающее при делении на 2, 3, 5, 7 остатки 1, 2, 4, 6 соответственно.

Упражнение 2. **(a)** Решите в целых числах уравнение $10x + 8 = 11y + 10$.
(b) Найдите все числа, дающие при делении на 8 остаток 2, а при делении на 13 — остаток 11.

Китайская теорема об остатках. Пусть целые числа $m_1, \dots, m_n$ попарно взаимно просты, $m = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$, и $a_1, \dots, a_n$ — произвольные целые числа. Тогда существует единственное целое число x такое, что $0 \leqslant x < m$ и

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2}, \\ \ldots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n}. \end{cases}$$

1. Пусть натуральные числа $m_1, m_2, \dots, m_n$ попарно взаимно просты. Докажите, что если числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ пробегают полные системы вычетов по модулям $m_1, m_2, \dots, m_n$ соответственно, то число

$$x = x_1 m_2 \ldots m_n + m_1 x_2 \ldots m_n + \ldots + m_1 m_2 \ldots m_{n-1} x_n$$

пробегает полную систему вычетов по модулю $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$. Выведите отсюда КТО.

2. Проникнувшись упражнением 2, докажите КТО по индукции.

3. **(a)** Натуральные числа $m_1, \dots, m_n$ попарно взаимно просты. Докажите, что число $x = (m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_n)^{\varphi(m_1)}$ является решением системы

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{m_1}, \\ x \equiv 0 \pmod{m_2}, \\ \ldots \\ x \equiv 0 \pmod{m_n}. \end{cases}$$

(b) Найдите в явном виде число x, удовлетворяющее КТО.

Теорема Вильсона. Пусть p — простое число. Тогда $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Упражнение. Натуральное $p > 1$ таково, что $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Докажите, что p — простое число.

4. Сколько существует замкнутых ломаных, проходящих через все вершины правильного p-угольника? (Ломаные, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми.) Найдите формулу и выведите из неё теорему Вильсона.

5. Пусть целое число a не делится на простое p. Докажите, что найдётся целое число b такое, что $ab \equiv 1 \pmod{p}$, а затем выведите отсюда теорему Вильсона.

6. Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашёл себе место и никого лишнего не осталось. Сколько солдат могло быть у генерала?

7. Докажите, что для любого натурального k существует сколь угодно длинный отрезок из натуральных чисел, каждое из которых делится по крайней мере на k различных простых чисел.

8. Пусть p — простое число. Докажите, что $(2p-1)!-p$ делится на p^2.

source:algebra/number-theory/crt-and-wilsons-theorem-g8r1.tex

Малая теорема Ферма и теорема Эйлера

Определение. Набор чисел называется *полной системой вычетов* по модулю m, если в нем встречаются все возможные остатки от деления на m ровно по одному разу.

Определение. Набор чисел называется *приведённой системой вычетов* по модулю m, если в нем встречаются все возможные взаимно простые с m остатки от деления ровно по одному разу.

Малая теорема Ферма (1). Пусть p — простое число, а a не делится на p. Тогда $(a^{p-1}-1)$ делится на p.

Малая теорема Ферма (2). Пусть a — целое число, p — простое. Тогда (a^p-a) делится на p.

1. **(a)** Вспомните бином Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + nab^{n-1} + b^n\,,$$

а затем докажите, что C_p^l делится на p, где p — простое число, а l — натуральное, меньшее p.
(b) Докажите, что $\big((a+1)^p - a^p - 1\big)$ делится на p и докажите малую теорему Ферма по индукции.

2. **Воспоминание.** Пусть a не делится на p. Тогда множество остатков чисел

$$1\cdot a, 2\cdot a, \ldots, (p-1)\cdot a$$

при делении на p совпадает с множеством $\{1, 2, \ldots, p-1\}$.

С помощью этого воспоминания докажите малую теорему Ферма.

3. Каждой вершине правильного $(p-1)$-угольника сопоставим какой-то ненулевой остаток при делении на p. Проведем из остатка k стрелку в остаток ka.
(a) Докажите, что из каждой точки выходит одна стрелка, и в каждую точку входит одна стрелка, откуда следует, что все стрелки разбиваются на циклические маршруты.
(b) Докажите, что у всех этих циклических маршрутов одна и та же длина, делящая $(p-1)$, а затем выведите отсюда малую теорему Ферма.

4. Сколько существует способов раскрасить вершины правильного p-угольника в a цветов? (Раскраски, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми.) Найдите формулу и выведите из нее малую теорему Ферма.

Определение. Пусть n — натуральное число. *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ определяется как количество натуральных чисел, не превосходящих n, взаимно простых с n.

Упражнение. Докажите, что если $n>2$, то $\varphi(n)$ четно.

Теорема Эйлера. a и n — натуральные взаимно простые числа. Тогда $(a^{\varphi(n)}-1)$ делится на n.

5. **(a)** Приведите рассуждения, аналогичные задаче 2, и докажите теорему Эйлера.
   (b) Приведите рассуждения, аналогичные задаче 3, и докажите теорему Эйлера.

6. **(a)** Пусть p и q — различные простые числа, α — натуральное. Найдите $\varphi(p^\alpha)$ и $\varphi(pq)$.
   (b) Докажите, что если a и b взаимно просты, то $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.
   (c) Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — разложение n на простые множители. Докажите, что

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

7. **Усиление теоремы Эйлера.** Пусть $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — разложение m на простые множители,

$$x = \text{НОК}\big(\varphi(p_1^{\alpha_1}), \varphi(p_2^{\alpha_2}), \ldots, \varphi(p_k^{\alpha_k})\big).$$

Докажите, что для любого a, взаимно простого с m, выполняется сравнение $a^x \equiv 1 \pmod{m}$.

source:algebra/number-theory/fermats-and-eulers-theorems-g8r1/1.tex

Ферма и Эйлер. Продолжение

1. Найдите остаток при делении 9^{2015} на **(a)** 23 **(b)** 1001.

2. Пусть p и q – различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$.

3. Докажите, что для нечётного натурального n число $(2^{n!} - 1)$ делится на n.

4. Докажите, что число $2015^{2016} + 2016^{2015}$ – составное.

5. Докажите, что для составного числа 561 справедлив аналог малой теоремы Ферма: если $(a, 561) = 1$, то $a^{560} \equiv 1 \pmod{561}$.

6. Докажите, что если p — простое число, отличное от 2 и 5, то длина периода разложения $1/p$ в десятичную дробь делит $(p - 1)$.

7. **(a)** Докажите, что $(n^{84} - n^4)$ делится на 6800 для любого натурального n.
(b) Можно ли 6800 заменить на какое-то большее число, чтобы утверждение осталось верным?

8. Дана последовательность $a_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$. Существуют ли 5 идущих подряд её членов, делящихся на 2015?

9. Пусть p и $p + 2$ – простые числа. Докажите, что $2p(p + 1)(p + 2)$ является общим делителем чисел $(p^{p+2} - p)$ и $\big((p + 2)^p - p - 2\big)$.

10. Пусть $p > 5$ – простое число.
(a) Докажите, что число $\underbrace{111\ldots11}_{p-1}$ делится на p.
(b) Докажите, что число

$$\underbrace{1\ldots1}_{p}\underbrace{2\ldots2}_{p}\underbrace{3\ldots3}_{p}\ldots\underbrace{9\ldots9}_{p} - 123456789$$

делится на p.

source:algebra/number-theory/fermats-and-eulers-theorems-g8r1/2.tex

НОД и НОК. Алгоритм Евклида

Алгоритм Евклида. Нахождение НОДа двух натуральных чисел a и b.

Если $a = b$, то $(a, b) = a$. Иначе будем считать, что $a > b$. Обозначим через a_0 число a, а через a_1 число b. Делим с остатком:

$$a_0 = q_1a_1 + a_2, \quad a_1 = q_2a_2 + a_3, \quad \ldots, \quad a_{n-1} = q_na_n.$$

Тогда $(a, b) = a_n$.

Упражнение 1. Докажите, что **(a)** $(a, b) = (a - b, b)$; **(b)** $(ac, bc) = c \cdot (a, b)$.

Упражнение 2: линейное разложение НОД. Докажите, что для любых целых a и b найдутся целые x и y такие, что $ax + by = (a, b)$.

1. Петя посчитал НОК всех чисел от 1 до 1000, а Вася — всех чисел от 501 до 1000. У кого результат получился больше и во сколько раз?
2. На складе лежат в большом количестве ширлы, мырлы и дырлы. Ширла состоит из пяти шашек, мырла — из семи машек, дырла — из девяти дашек. Все шашки одинаковы, машки – тоже, одинаковы и все дашки. У Васи есть чашечные весы без гирь, и он хочет за одно взвешивание узнать, что тяжелее: две шашки или машка с дашкой. Все изделия, имеющиеся на складе, не разбираются. Что же делать Васе?
3. Даны 6 натуральных чисел. Для каждой пары их НОД записали на доске. Может ли оказаться так, что на доске записаны все числа от 1 до 15?
4. Найдите **(a)** $(99! + 100!, 101!)$; **(b)** $(\underbrace{11\ldots1}_{100}, \underbrace{11\ldots1}_{2015})$.
5. Какие значения может принимать $(3n + 2, 10n + 23)$?
6. Докажите, что $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.
7. По бесконечной шахматной доске ходит (m, n)-крокодил, который может за один ход сдвинуться на m клеток по горизонтали или вертикали, а затем — на n клеток в перпендикулярном направлении. При каких m и n такой (m, n)–крокодил сможет попасть из любой клетки доски в любую другую?
8. Числа m и n взаимно просты. Какое наибольшее значение может принимать $(m+2015n, n+2015m)$?
9. Докажите, что
   (a) $(f_m, f_n) = 1$, где $f_k = 2^{2^k} + 1$ — числа Ферма;
   (b) число $(2^{2^n} - 1)$ имеет по крайней мере n различных простых делителей.

Замечание. Из предыдущей задачи следует, что простых чисел бесконечно много.

10. **(a)** Докажите, что если для некоторых натуральных a и b верно, что

$$\text{НОК}(a, a + 5) = \text{НОК}(b, b + 5), \quad \text{то} \ \ a = b\,.$$

(b) Может ли при различных натуральных a, b и c выполняться равенство

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(a + c, b + c)\,?$$

source:algebra/number-theory/gcd-lcm-and-euclids-algorithm-g8r1.tex

Линейные диофантовы уравнения

Теорема. Пусть a и b — взаимно простые числа. Тогда уравнение $ax + by = c$ имеет бесконечно много целочисленных решений, причем все они имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + bk, \\ y = y_0 - ak, \end{cases}$$

где k — произвольное целое число, а (x_0, y_0) — одно из решений уравнения $ax + by = c$.

Для того, чтобы решить в целых числах линейное уравнение $ax + by = c$ $(a, b \neq 0)$, надо действовать по следующему алгоритму:

(1) Находим $d = \text{НОД}(a, b)$.

(2) Проверяем, делится ли c на d. Если нет, то уравнение не имеет решений. Если да, то делим обе части на d, переходя к равносильному уравнению $a'x + b'y = c'$ со взаимно простыми $a' = a/d$ и $b' = b/d$ и правой частью $c' = c/d$.

(3) Находим частное решение (x_0, y_0) уравнения $a'x+b'y = c'$ (если получается — подбором, если нет — с помощью алгоритма Евклида).

(4) Записываем ответ в виде

$$\begin{cases} x = x_0 + bk, \\ y = y_0 - ak, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1. Решите в целых числах уравнение
   (a) $9x - 5y = 6$; **(b)** $2007x + 2015y = 257$.
2. Петя задумал натуральное число, умножил его на 51, затем поделил с остатком на 714 и получил в остатке 13. Не ошибся ли он?
3. Найдите две разные обыкновенные дроби — одну со знаменателем 8, другую со знаменателем 13, чтобы модуль разности между ними был как можно меньше.
4. Натуральные числа a и b взаимно просты. Докажите, что уравнение $ax + by = ab$ не имеет решений в натуральных числах.
5. В клетчатом прямоугольнике $m \times n$ провели диагональ. Сколько клеток она пересекла?
6. Ширлы и мырлы стоят целое число копеек. Известно, что 175 ширл стоят дороже, чем 125 мырл, но дешевле, чем 126 мырл. Хватит ли Васе одного рубля на трех ширл и одну мырлу?
7. Натуральные a, b и c таковы, что $ab + bc = ac$. Докажите, что
$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(b, c) = \text{НОК}(a, c)\,.$$
8. Верно ли, что для любых натуральных a и b найдутся натуральные p и q такие, что при любом натуральном n дробь $\frac{an+p}{bn+q}$ несократима?

9. Найдите все целочисленные решения уравнений
(a) $2x + 3y + 5z = 11$; **(b)** $12x + 15y + 20z = 4$.

10. Сформулируйте алгоритм решения в целых числах уравнений вида

$$ax + by + cz = d\,.$$

11. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ задана правилами: $x_1 = 2$, x_{n+1} — наибольший простой делитель числа $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n + 1$ при всех $n \geqslant 1$. Докажите, что $x_n \neq 5$ ни при каком натуральном n.

source:algebra/number-theory/linear-diophantine-equations-g8r1.tex

Числовой разнобой

1. Упростите выражение
   (a) $2014 \cdot (2015^9 + 2015^8 + \ldots + 2015^2 + 2016)$;
   (b) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{2015 \cdot 2016}$; **(c)** $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + 2015 \cdot 2015!$.
2. Являются ли следующие числа точными квадратами?
   (a) $3^{40} + 6^{20} + 2^{38}$;
   (b) $2013 \cdot 2014 \cdot 2015 \cdot 2016 + 1$;
   (c) $2015^2 + 2015^2 \cdot 2016^2 + 2016^2$;
   (d) $2015^{2016} + 2015^{1008} + 1$.
3. Можно ли из произведения $1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 100!$ вычеркнуть один сомножитель так, что произведение оставшихся будет точным квадратом?
4. Известно, что числа p и $p^2 + 2$ — простые. Докажите, что число $p^3 + 2$ также является простым.
5. Докажите, что произведение n последовательных натуральных чисел делится на $n!$.
6. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = 7(z^2 + t^2)$ не имеет решений в натуральных числах.
7. Докажите, что для любого натурального $n > 1$ число $n^4 + 4$ является составным.
8. Решите в натуральных числах уравнение $x^4 - 2y^2 = 1$.
9. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^{128} + b^{128} + c^{128}$ делится на 257. Докажите, что число abc делится на 257.
10. Число $(1 + \sqrt{2})^{2015}$ записали в виде $a + b\sqrt{2}$ с целыми a и b. Докажите, что $|a^2 - 2b^2| = 1$.

source:algebra/number-theory/mixture-g8r1.tex

Сравнения

1. Натуральные числа a и b таковы, что $3a+7b$ дает остаток 5 при делении на 11. А какой остаток дает $2a+b$ при делении на 11?
2. Число $N=(16a+17b)\cdot(17a+16b)$ делится на 11. Докажите, что N делится на 121.
3. У числа 2015^{2015} нашли сумму цифр. У результата опять нашли сумму цифр, и т. д., пока не получилась цифра. А что это за цифра?
4. У числа n^2+2n последняя цифра равна 4. А какая у него предпоследняя цифра?
5. Докажите, что разность произведения всех нечетных чисел от 1 до 2015 и произведения всех четных чисел от 2 до 2016 делится на 2017.
6. Пусть p — простое число, k — натуральное, не делящееся на p. Докажите, что среди остатков чисел $0\cdot k, 1\cdot k, 2\cdot k, \ldots, (p-1)\cdot k$ при делении на p все возможные остатки встречаются ровно по одному разу.
7. Пусть p и q — последовательные нечетные числа. Докажите, что p^p+q^q делится на $p+q$.
8. Для натуральных a и n докажите, что $a^{2n+3}+(a-1)^n$ делится на (a^2-a+1).
9. При каких целых k число $a^3+b^3+c^3-kabc$ делится на $a+b+c$ при любых целых a, b, c, сумма которых не равна 0?
10. Последовательность задана следующим образом: $a_1=a_2=1$, $a_{k+2}=a_k\cdot a_{k+1}+1$ при всех натуральных k. Докажите, что при любом натуральном $n\geqslant 7$ число (a_n-3) является составным.

source:algebra/number-theory/modular-arithmetic-g8r1.tex

Соответствия и кодирование

1. **(a)** Докажите, что количество разбиений числа n в сумму не более чем k слагаемых, равно количеству разбиений числа n в сумму слагаемых, не превосходящих k.
   (b) Докажите, что количество разбиений числа n равно количеству разбиений числа $2n$ в сумму ровно n слагаемых.
   (c) Докажите, что количество разбиений числа n в сумму различных слагаемых равно количеству разбиений числа n в сумму нечетных слагаемых.
2. В выпуклом n-угольнике проведены все диагонали, и никакие три из них не пересекаются в одной точке. Сколько получилось точек пересечения?
3. **(a)** Сколько клетчатых прямоугольников содержит доска 8×8?
   (b) Правильный треугольник разделен на n^2 маленьких правильных треугольников линиями параллельными сторонам. Сколько существует параллелограммов, стороны которых лежат на получившейся треугольной сетке?
4. Сколькими способами можно выбрать из n человек больше половины?
5. Докажите, что у точного квадрата делителей вида $4k + 1$ больше, чем делителей вида $(4k - 1)$.
6. Рассмотрим последовательность из n натуральных чисел. Будем называть ее *уморительной*, если вместе с каждым $k \geqslant 2$ в последовательность входит также и число $(k - 1)$, причем первое вхождение $(k - 1)$ до последнего вхождения k. Докажите, что количество уморительных последовательностей равно n! *(указание: установите соответствие с множеством перестановок).*

source:combinatorics/correspondence-g8r1.tex

Подсчет двумя способами

1. 10 друзей послали друг другу праздничные открытки, так что каждый послал 5 открыток. Докажите, что найдутся двое, которые послали открытки друг другу.

2. Можно ли в клетки квадрата 10×10 поставить некоторое количество звездочек так, чтобы в каждом квадрате 2×2 было ровно две звездочки, а в каждом прямоугольнике 3×1 — ровно одна звездочка?

3. Докажите, что максимальное количество сторон выпуклого многоугольника, стороны которого лежат на диагоналях данного выпуклого 100-угольника, не больше 100.

4. По кругу расставлены цифры $1, 2, 3, \ldots, 9$ в произвольном порядке. Каждые три цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют трехзначное число. Докажите, что сумма этих чисел не зависит от порядка цифр.

5. По кругу расставлены красные и синие числа. Каждое красное число равно сумме соседних чисел, а каждое синее — полусумме соседних чисел. Докажите, что сумма красных чисел равна нулю.

6. В прямоугольной таблице, составленной из положительных чисел, произведение суммы чисел любого столбца на сумму чисел любой строки равно числу, стоящему на их пересечении. Доказать, что сумма всех чисел в таблице равна единице.

7. Дано натуральное число n. Рассматриваются такие тройки различных натуральных чисел (a, b, c), что $a + b + c = n$. Возьмем наибольшую возможную такую систему троек, что никакие две тройки системы не имеют общих элементов. Докажите, что в ней не больше $2n/9$ элементов.

8. В компании из n человек у каждых двух людей не меньше m общих знакомых, и у каждого не больше d знакомых. Докажите, что

$$\frac{m(n-1)}{2} \leqslant \frac{d(d-1)}{2}\,.$$

9. В школе учатся 2015 мальчиков и 2015 девочек. Каждый школьник посещает не более 100 кружков. Известно, что для любых двух школьников разного пола найдется кружок, который посещают они оба. Докажите, что есть кружок, который посещает хотя бы 11 мальчиков и хотя бы 11 девочек.

source:combinatorics/count-twice-g8r1.tex

Зацикливания

1. Рассмотрим последовательность цифр, где каждая следующая равна последней цифре произведения двух предыдущих. Докажите, что
(a) эта последовательность периодична;
(b) ее период не больше 26;
(c) ее период не больше 17.

2. Числа Фибоначчи задаются формулами $f_1 = f_2 = 1$ и $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Докажите, что последовательность последних цифр этих чисел периодична, причем не имеет предпериода.

3. Докажите, что цифры после запятой у числа a/n образуют периодическую последовательность.

4. Докажите, что последовательность остатков при делении $16^n + 26^n$ на 2015 периодична.

5. Докажите, что последовательность последних цифр n^n периодична.

6. Станок выпускает детали двух типов. На ленте его конвейера выложены в одну линию 75 деталей. Пока конвейер движется, на станке готовится деталь того типа, которого на ленте меньше. Каждую минуту очередная деталь падает с ленты, а подготовленная кладется в ее конец. Через некоторое число минут после включения конвейера может случиться так, что расположение деталей на ленте впервые повторит начальное. Найдите:
(a) наименьшее такое число; **(b)** все такие числа.

7. Докажите, что для любого m найдется число Фибоначчи, делящееся на m.

8. На бесконечной в обе стороны ленте записан текст на русском языке. Известно, что в этом тексте число различных кусков из 15 символов равно числу различных кусков из 16 символов. Докажите, что на ленте записан периодический в обе стороны текст, например: «...мама мыла раму мама мыла раму...».

9. Назовем сочетанием цифр несколько цифр, записанных подряд. В стране Роботландии некоторые сочетания цифр объявлены запрещенными. Известно, что запрещенных сочетаний конечное число и существует бесконечная десятичная дробь, не содержащая запрещенных сочетаний. Докажите, что существует бесконечная периодическая десятичная дробь, не содержащая запрещенных сочетаний.

10. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). Ход состоит в том, что из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки.
(a) Пусть на каждом следующем ходу разрешается брать шарики из той коробочки, в которую был положен последний шарик на предыдущем ходу. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.

(b) Пусть теперь на каждом ходу разрешается брать шарики из любой коробочки. Верно ли, что за несколько ходов из любого начального расположения шариков по коробочкам можно получить любое другое?

source:combinatorics/cycling-g8/r1.tex

Индукция-1

1. В квадрате 1024×1024 вырезали одну клетку. Докажите, что оставшееся можно разрезать на уголки из трех клеток.

2. *Блинная сортировка.* На полке стоит 55 томов собрания сочинений В. И. Ленина. За раз разрешается взять несколько подряд идущих томов и переставить их в обратном порядке. Докажите, что такими операциями можно расставить тома по порядку.

3. Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении $n : (n+1)$, где n — любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы разделить отрезок на любое количество одинаковых частей. Прав ли он?

4. Плоскость разбита прямыми на области. Докажите, что области можно покрасить в два цвета так, чтобы граничащие области были разного цвета.

5. Докажите, что любое целое число единственным образом представимо в виде суммы некоторых из чисел $1, -2, 4, \ldots, (-2)^n, \ldots$. Попробуйте придумать хотя бы два способа сделать переход индукции.

6. Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

7. Несколько человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трех людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это всегда можно сделать.

8. Для того, чтобы проехать полный круг, машине требуется 100 литров бензина. Эти 100 литров распределены по бензоколонкам вдоль трассы. Докажите, что есть точка, начав с которой с пустым баком, машина проедет весь круг.

9. По кругу стоит 2015 чисел ± 1. Известно, что количество -1 не больше 671. Докажите, что найдется число такое, что все частичные суммы, начинающиеся с него (что вправо, что влево), положительны.

10. Можно ли отметить на плоскости несколько точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой отмеченной точки находилось ровно 10 отмеченных?

source:combinatorics/induction-g8/1/r1.tex

Индукция-2: индукция и алгоритмы

1. В компании из k человек, где $k > 3$, у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $(2k-4)$ разговора все они могут узнать все новости.

2. Даны n карточек. На обеих сторонах каждой карточки написано по одному из чисел $1, 2, \ldots, n$, причем так, что каждое число встречается на всех n карточках ровно два раза. Доказать, что карточки можно разложить на столе так, что сверху окажутся все числа $1, 2, \ldots, n$.

3. На полке стоит 55 томов собрания сочинений В. И. Ленина. За раз разрешается сделать любое из двух действий:
(1) поменять местами первые два тома на полке;
(2) переставить последний том в начало.
Докажите, что таким образом можно упорядочить все творческое наследие дедушки Ленина.

4. В шеренгу выстроилось n солдат. За одну операцию можно поменять любых двух солдат местами, после чего делается групповая фотография. Докажите, что за $n!$ операций можно получить все возможные фотографии.

5. В n мензурок налиты n разных жидкостей, кроме того, имеется одна пустая мензурка. Можно ли за конечное число операций составить равномерные смеси в каждой мензурке, то есть сделать так, чтобы в каждой мензурке было равно $1/n$ от начального количества каждой жидкости, и при этом одна мензурка была бы пустой? (Мензурки одинаковые, но количества жидкостей в них могут быть разными; предполагается, что можно отмерять любой объем жидкости.)

6. Есть четное число комнат, в каждой по три лампочки. Лампочки разбиты на пары (в паре могут быть лампочки из разных комнат). На каждую пару по одному выключателю, он при нажатии меняет состояние обеих лампочек в паре на противоположное. Докажите, что вне зависимости от того, какие лампочки горели в начале, можно сделать так, чтобы в каждой комнате хотя бы одна лампочка горела и хотя бы одна не горела.

7. На доске написаны в каком-то порядке числа от 1 до 2015. Каждую минуту происходит следующее: первые k чисел переписываются в обратном порядке, где k — первое число в строке. Докажите, что рано или поздно на первом месте будет число 1.

source:combinatorics/induction-g8/2/r1.tex

Добавка к индукции

1. Обозначим через a_n количество способов замостить прямоугольник $2 \times n$ доминошками. Докажите, что $a_n = f_{n+1}$.

2. Через $s(n)$ будем обозначать количество разбиений числа n в упорядоченную сумму степеней двойки (например, $s(4) = 6$). Найдите наименьшее n большее 2015 такое, что $s(n)$ нечетно. *(Указание: проведите численные эксперименты.)*

3. Докажите $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$, где f_n — n-ое число Фибоначчи.

4. Определим числа K_n: $K_0 = 1$ и $K_{n+1} = 1 + \min(2K_{[n/2]}, 3K_{[n/3]})$. Докажите, что $K_n \geqslant n$.

5. Назовем натуральное число *ровным*, если в его записи все цифры одинаковы (например: $4, 111, 999999$). Докажите, что любое n-значное число можно представить как сумму не более чем $n + 1$ ровных чисел.

6. Положительные числа $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1/2$. Докажите, что:
$$\frac{(1 - x_1) \cdot (1 - x_2) \cdot \ldots \cdot (1 - x_n)}{(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n)} \geqslant \frac{1}{3}\,.$$

7. Докажите неравенство
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}\,.$$

source:combinatorics/induction-g8/3-r1.tex

Моноварианты

1. На плоскости в вершинах треугольника сидят кузнечики. Каждую минуту один из кузнечиков, находящийся в точке A, перепрыгивает через другого кузнечика, находящегося в точке B, в точку A_1, причем так, чтобы $2AB = A_1B$. Смогут ли кузнечики через несколько ходов оказаться в начальном положении?
2. В каждой из n стран правит либо партия правых, либо партия левых. Каждый год в одной из стран, A, может поменяться власть. Это может произойти в том случае, если в большинстве граничащих со страной A стран правит не та партия, которая правит в стране A. Докажите, что смены правительств не могут продолжаться бесконечно.
3. На плоскости отмечено 200 точек. Каждая из точек соединена отрезком ровно с одной другой. За один раз Юлик может стереть пересекающиеся отрезки AB и CD и провести вместо них AC и BD. Докажите, что он не сможет промышлять этим вечно.
4. На бесконечном листе клетчатой бумаги несколько клеточек покрашено в черный цвет. Каждую секунду клетка окрашивается в тот цвет, которого больше всего среди ее соседей справа, слева и сверху. Докажите, что однажды вся плоскость станет белой.
5. На доске написано несколько чисел. Каждую минуту Юлик вместо двух из них пишет их НОД и НОК. Докажите, что начиная с некоторого момента ничего не будет меняться.
6. По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет свое мнение, а остальные — не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.
7. Любитель Чисел каждое утро выписывает на доску новое натуральное число, причем так, чтобы новое число не могло быть представлено в виде суммы нескольких (возможно, с повторениями) предыдущих. Сможет ли он заниматься этим вечно?
8. *Задача отозвана.*
9. На экране компьютера сгенерирована некоторая конечная последовательность нулей и единиц. С ней можно производить следующую операцию: набор цифр «01» заменять на набор цифр «1000». Может ли такой процесс замен продолжаться бесконечно или когда-нибудь он обязательно прекратится? *(Указание: это по духу похоже на задачу с шарами с олимпиады.)*

source:combinatorics/monovariant-g8/r1.tex

Дополнительные построения

1. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла D делит боковую сторону AB пополам. Докажите, что $AD + BC = CD$.

2. Треугольник ABC таков, что $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 20^\circ$ и $AB - BC = 4$. Найдите длину биссектрисы угла C.

3. Постройте трапецию $ABCD$ по основаниям $BC = b$ и $AD = a$ ($a < b$) и диагоналям $AC = d_1$ и $BD = d_2$.

4. Медиана AM треугольника ABC в четыре раза меньше стороны AB и $\angle BAM = 60^\circ$. Найдите угол $\angle BAC$.

5. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки M и N так, что $\angle MAN = 45^\circ$. AH — высота треугольника AMN. Докажите, что $AH = AB$.

6. В треугольнике ABC проведена биссектриса AE. Оказалось, что $AE = EC$ и $2AB = AC$. Найдите углы треугольника.

7. Отрезки AB и CD длины 1 пересекаются в точке O, причем $\angle AOC = 60^\circ$. Докажите, что $AC + BD \geqslant 1$.

8. В равнобедренном $AB = AC$ треугольнике ABC биссектриса угла A вдвое короче биссектрисы угла B. Найдите углы треугольника ABC.

source:geometry/additional-construction-g8r1.tex

Площади

Определение. Каждой фигуре M на плоскости мы сопоставим число S_M, называемое *площадью*, обладающее следующими свойствами:
(1) Площадь неотрицательна;
(2) Площади равных фигур равны;
(3) Площадь объединения фигур, не имеющих общих внутренних точек, есть сумма площадей фигур;
(4) Площадь прямоугольника равна произведению его сторон.

1. Дан прямоугольник $ABCD$.
(a) На BC взята точка K. Докажите, что $S_{ABCD} = 2S_{AKD}$.
(b) На BC взяты точка K и L. Докажите, что $S_{AKD} = S_{ALD}$.
(c) На прямой BC взята точка K, а на прямой AD взята точка L. Докажите, что $S_{AKD} = S_{BLC}$.

Факт. Даны две параллельные прямые AB и l. Тогда площадь $\triangle ABC$ не зависит от от выбора точки C, находящейся на прямой l.

2. В трапеции $ABCD$ с меньшим основанием BC через точку B проведена прямая, параллельная CD и пересекающая диагональ AC в точке E. Сравните площади $\triangle ABC$ и $\triangle DEC$.

3. Докажите, что в трапеции с проведенными диагоналями треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики.

4. Через точку D, лежащую на стороне BC треугольника ABC, проведены прямые, параллельные двум другим сторонам и пересекающие AB и AC соответственно в точках E и F. Докажите, что $S_{CDE} = S_{BDF}$.

5. Точка E — середина стороны BC треугольника ABC. Точки D и G на сторонах BC и AC соответственно таковы, что $AD \perp BC$ и $GE \perp BC$. Докажите, что $S_{CGD} = S_{DGAB}$.

6. Докажите, что медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников.

7. Пол в комнате площадью S покрыт линолеумом общей площадью S так, что нет участков, покрытых более чем в два слоя. Докажите, что площадь пола, покрытая дважды, равна площади пола, не покрытой ни разу.

8. Рис. 2.1: выразите X через S. Там, где не указано, $X = S_{ABC}$.

9. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на 4 части, площади которых, взятые последовательно, равны S_1, S_2, S_3, S_4. Докажите, что $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

10. Внутри правильного треугольника выбрали точку. Докажите, что сумма расстояний от нее до сторон треугольника от данного выбора не зависит. А верно ли это для правильного пятиугольника?

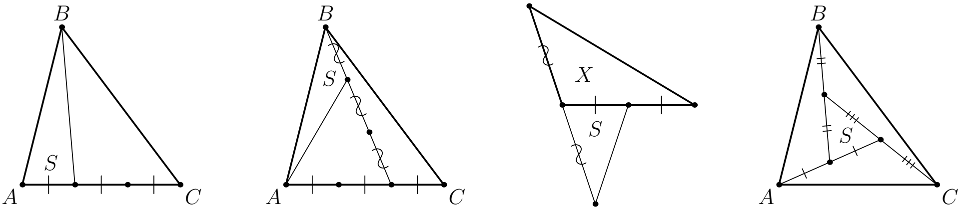


Рис. 2.1: к задаче 8

11. Каждая из сторон выпуклого четырехугольника разделена на три равные части, и соответствующие точки противоположных сторон соединены. Докажите, что площадь центрального четырехугольника в девять раз меньше площади целого.

source:geometry/area-g8r1.tex

Построения

Простейшие построения.

- на прямой отложить от данной точки отрезок заданной длины;
- отложить от данного луча в данную полуплоскость угол, равный данному углу;
- построить серединный перпендикуляр к данному отрезку;
- разделить данный угол пополам;
- из данной точки прямой восставить перпендикуляр к данной прямой;
- из данной точки вне прямой опустить перпендикуляр на эту прямую;
- построить треугольник по трем сторонам.

Упражнение. Постройте центр данной окружности.

1. Дана окружность и точка вне нее. Постройте из этой точки касательную к окружности.

2. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и радиусу вписанной окружности.

3. Постройте треугольник по стороне и высотам, проведенным к двум другим сторонам.

4. Постройте треугольник по двум сторонам и
(a) высоте, **(b)** медиане,
проведенными из одной вершины.

5. Постройте треугольник по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и высоте, опущенной на другую сторону.

6. Постройте параллелограмм по диагоналям и углу между сторонами.

7. Постройте окружность, на которой стороны данного треугольника высекают три хорды, равные заданному отрезку.

8. Дана окружность, ее диаметр AB и точка C на этом диаметре. Постройте на окружности две точки X и Y, симметричные относительно диаметра AB, для которых прямая YC перпендикулярна прямой XA.

9. Даны окружность, ее центр и две точки A и B, не лежащие на окружности. Пользуясь только циркулем, постройте точки пересечения окружности с прямой AB, если известно, что эта прямая не проходит через центр окружности.

10. Через
(a) вершину **(b)** точку на стороне
данного выпуклого четырехугольника проведите прямую, делящую его на две равновеликие части.

`source:geometry/construction-g8r1.tex`

Равенство треугольников

Упражнение 1. Докажите, что в равных треугольниках равны соответствующие
(a) медианы; **(b)** биссектрисы; **(c)** высоты.

Упражнение 2. Докажите, что треугольник является равнобедренным, если в нем совпадают
(a) медиана и высота; **(b)** высота и биссектриса; **(c)** биссектриса и медиана.

1. Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BK. Найдите AB, если $BC = 6$.

2. Стороны равностороннего треугольника делятся точками K, L, M в одинаковом отношении (считая по часовой стрелке). Докажите, что треугольник KLM также равносторонний.

3. Докажите, что диагонали четырехугольника, все стороны которого равны, перпендикулярны.

4. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC и пересекающие прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите AB, если $BM = 3$, $KC = 2$.

5. Докажите, что медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC тогда и только тогда, когда угол A — прямой.

6. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что следующие условия равносильны:
(1) $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$;
(2) $AB = CD$ и $BC = AD$;
(3) $AO = OC$ и $BO = OD$.

7. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Периметр треугольника ABC равен периметру треугольника ABD, а периметр треугольника ACD — периметру треугольника BCD. Докажите, что $AO = BO$.

8. Точки M и N — середины равных сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку MN проходит через точку P.

9. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны, а стороны AB и CD – нет. Докажите, что $AB = CD$ тогда и только тогда, когда углы A и D равны.

10. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена биссектриса BB_1. Оказалось, что $BC = AB_1$. Докажите, что $BC = AB_1 = BB_1$.

source:geometry/equal-triangles-g8r1.tex

Геометрическое место точек

Определение. *Геометрическое место точек (ГМТ)* — это множество точек плоскости, которые удовлетворяют указанному свойству или соотношению.

Простейшие примеры.
ГМТ, равноудаленных от концов отрезка, — серединный перпендикуляр к этому отрезку;
ГМТ, равноудаленных от лучей данного угла, — биссектриса этого угла;
ГМТ, из которых данный отрезок виден под прямым углом, — окружность без двух точек;
ГМТ, удаленных от данной точки на расстояние $R > 0$, — окружность.

Упражнение 1. Даны точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Найдите ГМТ M таких, что
(a) прямая CM не пересекает отрезок AB; **(b)** отрезок CM пересекает отрезок AB.

Упражнение 2. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, *центре описанной окружности*.

1. Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место точек C таких, что
(a) $\angle BAC = 17°$; **(b)** $AC < BC$; **(c)** $AC + BC = AB$;
(d) высота CH треугольника ABC равна h;
(e) медиана CM треугольника ABC равна m;
(f) треугольник ABC — равнобедренный;
(g) треугольник ABC — остроугольный;
(h) треугольник ABC — тупоугольный;
(i) расстояние от C до какой-нибудь из двух точек A и B меньше длины отрезка AB.
(j) $\angle B$ — второй по величине угол треугольника ABC (если два меньших угла или все три угла треугольника равны, то вторым по величине считается каждый из них).

2. Дан квадрат $ABCD$. Найдите ГМТ таких, что сумма расстояний от каждой из них до прямых AB и CD равна сумме расстояний до прямых BC и AD.

3. Найдите ГМТ внутренних точек прямоугольника $ABCD$ таких, что $S_{ABM}+S_{CDM} = S_{ADM}+S_{BCM}$.

4. **(a)** Найдите ГМТ, равноудаленных от двух данных прямых.
(b) Докажите, что три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, *центре вписанной окружности*.
(c) Докажите, что биссектриса внутреннего угла и две биссектрисы внешних углов треугольника пересекаются в одной точке, *центре вневписанной окружности*.

5. **(a)** Дан треугольник ABC. Найдите ГМТ X таких, что $S_{ABX} = S_{CBX}$.
(b) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

6. **(a)** Дан треугольник ABC. Найдите ГМТ X таких, что $AX^2 - XC^2 = AB^2 - BC^2$.
(b) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

7. Лестница стоит вплотную к стене, а к ее середине прилипла муха. Лестница плавно скользит, и в итоге падает на пол (ее верхний конец всегда прижат к стене). Какова траектория мухи?

8. Для выпуклого четырехугольника $ABCD$ верно $AB < BC$ и $AD < DC$. Точка M лежит на диагонали BD. Докажите, что $AM < MC$.

source:geometry/locus-g8r1.tex

Геометрический разнобой

1. Существует ли такой треугольник, что
   (a) все его стороны больше 1 км, а площадь меньше 1 см^2?
   (b) все его высоты меньше 1 см, а площадь больше 1 км^2?
   (c) все его стороны меньше 1 см, а площадь больше 1 см^2?

2. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно так, что $\angle BAM = \angle CKM = 30^\circ$. Найдите $\angle AKD$.

3. Пусть BB_1 — биссектриса неравнобедренного треугольника ABC с углом $\angle B = 38^\circ$. Из точки O, лежащей на луче BB_1, опустили перпендикуляр OH на сторону AC. Оказалось, что $AH = HC$. Найдите $\angle OAC$.

4. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. На прямой AC выбрана точка D такая, что A — середина DC. Перпендикуляр к прямой DC в точке A пересекает отрезок BD в точке E. Докажите, что $\angle DBA = \angle BCE$.

5. Найдите геометрическое место внутренних точек данного угла, сумма расстояний от которых до сторон данного угла равна заданной величине.

6. Точка F — середина медианы BD треугольника ABC. Точка E на стороне BC такова, что $DE \perp BC$. Докажите, что если $AB = AE$, то $\angle AFD = \angle FED$.

7. Даны правильные треугольники ABC и ADF. Известно, что точка D расположена на стороне BC так, что отрезки DF и AB пересекаются. Кроме того, на стороне BC отмечена такая точка E, что $BD = EC$. Докажите, что AB перпендикулярно EF.

8. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D такая, что $AC = BD$ и $\angle ABD = 25^\circ$. Известно также, что $\angle BAC = 40^\circ$. Докажите, что $AD + BC > AB$.

9. В вершине A единичного квадрата $ABCD$ сидит муравей. Ему надо добраться до точки C, где находится вход в муравейник. Точки A и C разделяет вертикальная стена, имеющая вид равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой DB. Найдите длину кратчайшего пути, который надо преодолеть муравью, чтобы попасть в муравейник.

source:geometry/mixture-g8r1.tex

Неравенство треугольника

1. Докажите, что длина ломаной, соединяющей концы отрезка, не меньше длины отрезка.

2. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырехугольника больше суммы его двух противоположных сторон. 22.

3. Периметр пятиконечной звезды равен a, периметр выпуклого пятиугольника с вершинами в вершинах звезды равен b, периметр внутреннего пятиугольника звезды равен c. Докажите, что $b + c < 2a$.

4. Докажите, что в выпуклом пятиугольнике найдутся три диагонали, из которых можно составить треугольник.

5. Докажите, что в параллелограмме против большего угла лежит большая диагональ.

6. Биссектриса угла при основании BC равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону AC в точке K. Докажите, что $BK < 2CK$.

7. Отрезки AB и CD длины 1 пересекаются в точке O, причем $\angle AOC = 60^\circ$. Докажите, что $AC + BD \geqslant 1$.

8. **(a)** Даны два выпуклых многоугольника P и Q, причем P находится строго внутри Q. Докажите, что периметр P меньше периметра Q.
(b) Верно ли это для невыпуклых многоугольников?

source:geometry/triangle-inequality-g8r1.tex

Вступительная олимпиада

Довывод

1. Отец и сын катаются на коньках по кругу. Время от времени отец обгоняет сына. После того, как сын переменил направление своего движения на противоположное, они стали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз отец быстрее сына?

2. В гости к Андрею пришло 10 человек, у всех разный размер ноги. Они уходят по одному, причем каждый надевает произвольную пару обуви, в которую может влезть. В какой-то момент оказалось, что больше никто уйти не может, так как имеющаяся обувь слишком мала для всех оставшихся. Какое наибольшее число человек могло остаться?

3. У двух равнобедренных треугольников равны основания. Более того, оказалось, что их вершины лежат все на одной окружности. Обязательно ли эти треугольники равны?

4. Докажите, что $2^{27} + 3^{27}$ делится на 5.

5. «Крокодилом» называется фигура, ход которой заключается в прыжке на клетку, в которую можно попасть сдвигом на одну клетку по вертикали или горизонтали, а затем на N клеток в перпендикулярном направлении (при $N = 2$ «крокодил» — это шахматный конь). При каких N «крокодил» может пройти с каждой клетки бесконечной шахматной доски на любую другую?

Вывод

6. Какое наибольшее количество чисел от 1 до 2015 можно выбрать так, чтобы у любых двух выбранных чисел наибольший общий делитель был больше 1?

7. На дно горизонтальной прямоугольной коробки кладут бутылки (тоже горизонтально). Рис. 2.2. В коробке достаточно места, чтобы в нижнем ряду поместилось три бутылки, но не хватает места для четырех. Поверх этих трех бутылок во второй ряд естественным образом кладут две бутылки. В третий ряд кладут три бутылки. Докажите, что центры бутылок третьего слоя лежат на одной прямой.

8. На столе стоят n ящиков, занумерованных числами от 1 до n. По ним произвольным образом разложено n шариков. За ход разрешается сделать следующее: если в одном из крайних ящиков есть шарик, то можно переложить его в соседний ящик; если в одном из остальных ящиков есть хотя бы два шарика, то один можно переложить в соседний слева ящик, а другой — в соседний справа. Докажите, что вне зависимости от исходного расположения шариков, можно сделать так, чтобы в каждом ящике лежал ровно один шарик.

source:olympiad/g8-intro.tex

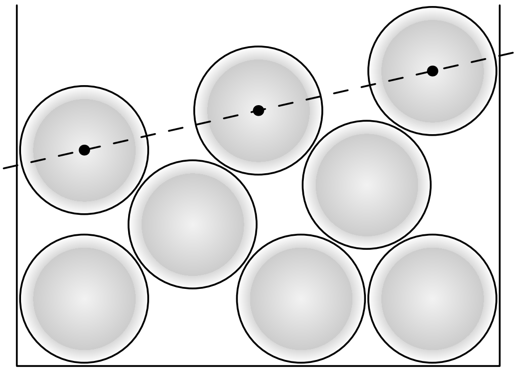


Рис. 2.2: к условию задачи 7

Зачёт

1. Найдите все пары простых чисел $p > q$ такие, что $p + 3q + 1$ делится на $(p - q)$.
2. Каждый зритель, купивший билет в первый ряд кинотеатра, занял одно из мест в первом ряду. Оказалось, что все места в первом ряду заняты, но каждый зритель сидит не на своем месте. Билетёр может менять местами соседей, если оба сидят не на своих местах. Всегда ли он может рассадить всех на свои места?
3. Дан треугольник ABC. Внутри него взяли точку M и соединили ее с вершинами. Получилось три треугольника. Найдите геометрическое место точек M, для которых сумма площадей двух из этих треугольников будет равна площади третьего.
4. Десять футбольных команд сыграли каждая с каждой по одному разу. В результате у каждой команды оказалось ровно по N очков. Каково наибольшее возможное значение N? (Победа — 3 очка, ничья — 1 очко, поражение — 0).
5. На сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах построены четыре круга. Докажите, что они покрывают весь четырехугольник.
6. Число $x + \frac{1}{x}$ — целое. Докажите, что для любого натурального n число $x^n + \frac{1}{x^n}$ также является целым.
7. Сколькими способами можно расставить нули и единицы в таблице 2015×2015 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце было нечетное число единиц?
8. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $\angle MKN = 90°$. Докажите, что из отрезков AM, BN и MN можно составить прямоугольный треугольник.
9. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^{804} + b^{804} + c^{804}$ делится на 2015. Докажите, что число abc также делится на 2015.

source:olympiad/g8r1-final.tex

Глава 3

Сверчки (9-3)

Конструкции

1. На доске записаны числа $1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать их разность — неотрицательное число. Может ли на доске в результате нескольких таких операций остаться только число 15?

2. Кое-кто в классе смотрит футбол, кое-кто — мультики, но нет таких, кто не смотрит ни то, ни другое. У любителей мультиков средний балл по математике меньше 4, у любителей футбола — тоже меньше 4. Может ли средний балл всего класса по математике быть больше 4?

3. Аня, Боря и Вася составляли слова из заданных букв. Все составили разное число слов: больше всех — Аня, меньше всех — Вася. Затем ребята просуммировали очки за свои слова. Если слово есть у двух игроков, за него дается 1 очко, у одного игрока — 2 очка, а слова, общие у всех трех игроков, вычеркиваются. Могло ли так случиться, что больше всех очков набрал Вася, а меньше всех — Аня?

4. В 10 одинаковых кувшинов было разлито молоко — не обязательно поровну, но каждый оказался заполнен не более, чем на 10%. За одну операцию можно выбрать кувшин и отлить из него любую часть поровну в остальные кувшины. Докажите, что не более чем за 10 таких операций можно добиться, чтобы во всех кувшинах молока стало поровну.

5. Гриб называется плохим, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?

6. Том Сойер взялся покрасить очень длинный забор, соблюдая условие: любые две доски, между которыми ровно две, ровно три или ровно пять досок, должны быть окрашены в разные цвета. Какое наименьшее количество красок потребуется Тому для этой работы?

7. В вершинах 33-угольника записали в некотором порядке целые числа от 1 до 33. Затем на каждой стороне написали сумму чисел в ее концах. Могут ли на сторонах оказаться 33 последовательных целых числа (в каком-нибудь порядке)?

8. На плоскости даны два равных многоугольника F и F'. Известно, что все вершины многоугольника F принадлежат F' (могут лежать внутри него или на границе). Верно ли, что все вершины этих многоугольников совпадают?

9. Можно ли записать в строку 20 чисел так, чтобы сумма любых трех последовательных чисел была положительна, а сумма всех 20 чисел была отрицательна?

10. Можно ли расставить в вершинах куба натуральные числа так, чтобы в каждой паре чисел, связанных ребром, одно из них делилось на другое, а во всех других парах такого не было?

Классическая комбинаторика

1. У одного школьника есть 6 книг по математике, а у другого — 8. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

2. Человек имеет 6 друзей и в течение 5 дней приглашает к себе в гости каких-то троих из них так, чтобы компания ни разу не повторялась. Сколькими способами он может это сделать?

3. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

4. Сколькими способами можно составить комиссию из 3 человек, выбирая ее членов из 4 супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?

5. Сколько существует шестизначных чисел, у которых по три четных и нечетных цифры?

6. Фабрика игрушек выпускает проволочные кубики, в вершинах которых расположены маленькие разноцветные шарики. По ГОСТу в каждом кубике должны быть использованы шарики всех восьми цветов (белого и семи цветов радуги). Сколько разных моделей кубиков может выпускать фабрика?

7. Имеется 20 человек — 10 юношей и 10 девушек. Сколько существует способов составить компанию, в которой было бы одинаковое число юношей и девушек?

8. Сколькими способами натуральное число n можно представить в виде суммы
   (a) k натуральных слагаемых?
   (b) k неотрицательных целых слагаемых?
   (Представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.)

source:combinatorics/counting-g9r3.tex

Геометрическая комбинаторика

1. Замостите шахматную доску фигурками тетрамино в форме буквы «Т».

2. Как разрезать треугольник на несколько треугольников так, чтобы никакие два из треугольников разбиения не имели целой общей стороны?

3. Каждую грань кубика разбили на четыре равных квадрата и раскрасили эти квадраты в три цвета так, чтобы квадраты, имеющие общую сторону, были покрашены в разные цвета. Докажите, что в каждый цвет покрашено по 8 квадратиков.

4. Можно ли покрасить 4 вершины куба в красный цвет и 4 другие — в синий так, чтобы плоскость, проходящая через любые три точки одного цвета, содержала точку другого цвета?

5. Можно ли нарисовать на плоскости шесть точек и так соединить их непересекающимися отрезками, что каждая точка будет соединена ровно с четырьмя другими?

6. Прямая раскрашена в два цвета. Докажите, что на ней найдутся три точки A, B и C, окрашенные в один цвет такие, что точка B является серединой отрезка AC.

7. Отметьте несколько точек и несколько прямых так, чтобы на каждой прямой лежало ровно три отмеченные точки и через каждую точку проходило ровно три отмеченные прямые.

8. Можно ли на плоскости разместить конечное число парабол так, чтобы их внутренние области покрыли всю плоскость?

9. В клетчатом квадрате 64×64 вырезали одну из клеток. Докажите, что оставшуюся часть квадрата можно разрезать на уголки из трех клеток.

10. На плоскости даны несколько точек. Известно, что для любых двух из них на прямой, проходящей через них, лежит еще одна данная точка. Докажите, что все точки данного набора лежат на одной прямой.

source:combinatorics/geometrical-g9r3.tex

Путешествия по графам

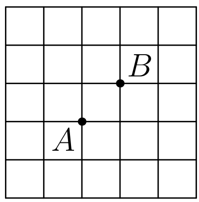
1. В некотором государстве каждый город соединен с каждым дорогой. Сумасшедший король хочет ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы выехав из любого города, в него нельзя было вернуться. Можно ли так сделать?

2. В стране Мара расположено несколько замков. Из каждого замка ведут три дороги. Из какого-то замка выехал рыцарь. Странствуя по дорогам, он из каждого замка, стоящего на его пути, поворачивает либо направо, либо налево по отношению к дороге, по которой приехал. Рыцарь никогда не сворачивает в ту сторону, в которую он свернул перед этим. Доказать, что когда-нибудь он вернется в исходный замок.

3. Докажите, что связный граф, имеющий не более двух нечетных вершин, можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз.

4. Докажите, что связный граф, имеющий не более $2n$ нечетных вершин, можно нарисовать, отрывая карандаш от бумаги $(n-1)$ раз и проводя каждое ребро ровно один раз.

5. Любознательный турист хочет прогуляться по улицам Старого города от вокзала (точка A на плане) до своего отеля (точка B). Турист хочет, чтобы его маршрут был как можно длиннее, но дважды оказываться на одном и том же перекрестке ему неинтересно, и он так не делает. Нарисуйте на плане самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет.



6. Поселок построен в виде квадрата 3 квартала на 3 квартала (кварталы — квадраты со стороной b, всего 9 кварталов). Какой наименьший путь должен пройти асфальтоукладчик, чтобы заасфальтировать все улицы, если он начинает и кончает свой путь в угловой точке A? (Стороны квадрата — тоже улицы).

7. Можно ли n раз рассадить $2n+1$ человек за круглым столом, чтобы никакие двое не сидели рядом более одного раза, если
(a) $n = 5$; **(b)** $n = 4$;
(c) n — произвольное натуральное число?

8. В стране несколько городов, соединенных дорогами с односторонним и двусторонним движением. Известно, что из каждого города в любой другой можно проехать ровно одним путем, не проходящим два раза через один и тот же город. Докажите, что страну можно разделить на три губернии так, чтобы ни одна дорога не соединяла два города из одной губернии.

9. В стране n городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придется поменять вид транспорта не более одного раза.

source:combinatorics/graph/mixture-g9r3/1-travel.tex

Графы-2

1. В графе каждая вершина — синяя или зеленая. При этом каждая синяя вершина связана с 5 синими и 10 зелеными, а каждая зеленая — с 9 синими и 6 зелеными. Каких вершин больше — синих или зеленых?

2. Докажите, что среди любых шести людей есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. Верно ли это утверждение для пяти людей?

3. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

4. В какое наибольшее число цветов можно покрасить ребра куба так, чтобы для любых двух цветов нашлись два ребра, окрашенные в эти цвета, имеющие общую вершину?

5. Верно ли, что для любого n существует граф, все ребра которого являются единичными отрезками, а степень каждой вершины равна n?

6. Приведите пример графа, все ребра которого являются единичными отрезками, хроматическое число которого равно 4 (хроматическим числом называется наименьшее число цветов, в которое можно покрасить вершины данного граф так, чтобы соседние вершины были покрашены в разные цвета).

7. Несколько Совершенно Секретных Объектов соединены подземной железной дорогой таким образом, что каждый Объект напрямую соединен не более чем с тремя другими, и от каждого Объекта можно добраться под землей до любого другого, сделав не более одной пересадки. Каково максимальное число Совершенно Секретных Объектов?

8. Как соединить 50 городов наименьшим числом авиалиний так, чтобы из каждого города можно было попасть в любой, сделав не более двух пересадок?

9. В стране n городов. Между каждыми двумя городами установлено воздушное сообщение одной из двух авиакомпаний. Докажите, из этих двух авиакомпаний хотя бы одна такова, что что из любого города можно попасть в любой другой рейсами только этой авиакомпании.

source:combinatorics/graph/mixture-g9r3/2.tex

Две пересекающиеся окружности

1. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B, а через точку Q — секущая, которая пересекает окружности в точках C и D соответственно. Докажите, что:
(a) $\angle AQB = \angle CPD$; **(b)** $AC \parallel BD$;
(c) $AC = BD$ тогда и только тогда, когда $AB \parallel CD$.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена секущая, которая пересекает окружности в точках C и D. Через точки C и D проведены касательные к окружностям, которые пересекаются в точке E. Докажите, что:
(a) четырехугольник $BCED$ — вписанный;
(b) величина $\angle CED$ не зависит от выбора секущей.

3. На хорде AB окружности с центром O выбрана произвольная точка C. Через точки A, O и C проведена окружность, которая пересекает данную окружность в точке D. Докажите, что треугольник BCD — равнобедренный.

4. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая пересекает эти окружности последовательно в точках A, B, C и D. Докажите, что $\angle APB = \angle CQD$.

5. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольника AQB.

6. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через произвольную точку X первой окружности проведена прямая XA, которая пересекает вторую окружность в точке Y и прямая XB, которая пересекает вторую окружность в точке Z. Докажите, что:
(a) прямая YZ перпендикулярна диаметру первой окружности, проведенному через точку X;
(b) высоты всех таких треугольников XYZ, проведенные из точки X, пересекаются в одной точке;
(c) биссектрисы всех таких треугольников XYZ, проведенные из точки X, пересекаются в одной точке.

7. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Общая касательная к этим окружностям касается их в точках A и B. Докажите, что:
(a) прямая PQ пересекает отрезок AB в его середине;
(b) равны радиусы окружностей, описанных около треугольников APB и AQB;
(c) окружность, описанная около одного из этих треугольников, проходит через ортоцентр другого треугольника.

source:geometry/intersecting-circle-pair.tex

Разнобой-повторение

1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пусть H_A, H_B, H_C, H_D — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Докажите, что
(a) $H_AH_B = AB$; **(b)** $H_AH_BH_CH_D$ — четырехугольник, равный $ABCD$.

2. На окружности зафиксированы точки A и B. Точка C движется по дуге окружности.
(a) Докажите, что точка I_a пересечения биссектрис внешних углов B и C треугольника ABC движется по дуге некоторой окружности.
(b) Укажите центр окружности, по которой движется точка I_a.

3. Из точки пересечения A двух окружностей одновременно с одинаковыми угловыми скоростями стартовали два велосипедиста B_1 и B_2, оба против часовой стрелки. Докажите, что
(a) все треугольники AB_1B_2 подобны;
(b) середина отрезка B_1B_2 движется по окружности.

4. Дан треугольник ABC; из точек A и C одновременно с равными скоростями стартуют две мухи в сторону точки B.
(a) Укажите точку, от которой они постоянно равноудалены.
(b) А если они двигаются в разные стороны: одна к точке B, а другая от точки B?
(c) Докажите, что в первом случае середина отрезка между мухами движется по прямой, параллельной биссектрисе угла B.

5. Даны два квадрата $ABCD$ и $AEFG$ с общей вершиной A, вершины указаны против часовой стрелки. Докажите, что прямые BE, CF и DG пересекаются в одной точке и найдите углы между этими прямыми.

6. **(a)** Ортоцентр H остроугольного треугольника ABC отразили относительно середины стороны AB. Докажите, что полученная точка диаметрально противоположна точке C в описанной окружности треугольника.
(b) Докажите, что вершины A и B остроугольного треугольника ABC, ортоцентр H, а также проекция H на медиану из вершины C лежат на одной окружности.

source:geometry/mixture-g9/r3.tex

Передвижение точек

1. В середине лестницы, приставленной к стене сидит котенок. Лестница начинает сползать по стене (и скользить по полу). Какую траекторию описывает котенок?

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности против часовой стрелки. При этом угловые скорости у них одинаковые. Докажите, что прямая, соединяющая их, все время проходит через точку B.

3. На окружности зафиксированы точки A и B. Точка C движется по дуге окружности. Докажите, что точка пересечения H высот треугольника ABC движется по окружности, симметричной описанной окружности треугольника ABC относительно стороны AB, если

(a) треугольник ABC остроугольный;
(b) если угол C тупой;
(c) если угол A тупой.

4. На окружности зафиксированы точки A и B. Точка C движется по дуге окружности.
(a) Докажите, что точка I пересечения биссектрис треугольника ABC тоже движется по дуге некоторой окружности.
(b) Укажите центр окружности, по которой движется точка I.

5. Две мухи ползут по сторонам угла с вершиной O с одинаковой постоянной скоростью, одна в сторону точки O, вторая — от точки O. В какой-то момент они оказались на одинаковом расстоянии от некоторой точки A на биссектрисе угла. Докажите, что они либо все время от нее равноудалены, либо этого больше никогда не произойдет.

6. Велосипедисты едут по двум концентрическим окружностям с центром O с одинаковыми угловыми скоростями против часовой стрелки. В начальный момент их положения A_1 и B_1 таковы, что $OA_1 \perp A_1B_1$. Докажите, что если в какой-то момент они располагаются в точках A_2 и B_2, то A_1A_2 делит B_1B_2 пополам.

7. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности один по часовой стрелке, другой — против. Угловые скорости у них одинаковые. Четырехугольник AO_1CO_2 — параллелограмм. Докажите, что велосипедисты постоянно равноудалены от точки C.

source:geometry/moving-points-g9r3.tex

Четырехугольник с перпендикулярными диагоналями

1. Дан четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что существует четырехугольник с такими же длинами сторон и двумя прямыми углами.

2. Дан шестиугольник $ABCDEF$, в котором углы A и C — прямые, $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Докажите, что его диагонали BE и DF перпендикулярны.

Во всех остальных задачах (кроме задачи 7c) рассматривается выпуклый четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность с центром O. Его диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P.

3. Докажите, что в таком четырехугольнике $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.

4. Докажите, что расстояние от точки O до стороны AB равно половине длины CD.

5. Через вершины вписанного четырехугольника проведены касательные к его описанной окружности. Докажите, что точки их попарного пересечения являются вершинами вписанного четырехугольника тогда и только тогда, когда диагонали исходного четырехугольника взаимно перпендикулярны.

6. Докажите, что прямая, проведенная из точки P перпендикулярно стороне BC, делит сторону AD пополам.

7. **(a)** Докажите, что $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 4R^2$, где R — радиус окружности, описанной около данного четырехугольника.
(b) Найдите сумму квадратов сторон этого четырехугольника, если дан радиус R.
(c) Докажите, что если четырехугольник с перпендикулярными диагоналями является описанным, то он симметричен относительно одной из его диагоналей.

8. **(a)** Докажите, что середины сторон данного четырехугольника лежат на одной окружности.
(b) Докажите, что проекции точки P на стороны четырехугольника (основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны) лежат на той же окружности.
(c) Докажите, что точка P является центром окружности, вписанной в четырехугольник, вершинами которого являются проекции точки P на стороны $ABCD$.
(d) Докажите, что стороны четырехугольника, образованного проекциями точки P на стороны $ABCD$ (см. пункты 8b и 8c), параллельны сторонам четырехугольника, образованного попарным пересечением касательных в вершинах четырехугольника ABCD (см. задачу 5).

source:geometry/quadrilateral-with-perp-diagonals.tex

Глава 4

Кузнечики (9-2)

Теория чисел. Вспоминаем (узнаём?) классические теоремы

Малая теорема Ферма. Если p — простое число, а a не делится на p, то $(a^{p-1} - 1)$ делится на p.

Альтернативная формулировка. Если p — простое число, то $(a^p - a)$ делится на p.

1. **(a)** Вспомните, что $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + b^n$.
(b) Осознайте, что C_p^l делится на p, если p — простое число, а $0 < l < p$.
(c) Докажите, что $\big((a+1)^p - a^p - 1\big)$ делится на p и выведите отсюда доказательство малой теоремы Ферма по индукции.

2. **(a)** Пусть a не делится на p. Докажите, что среди чисел

$$1 \cdot a, 2 \cdot a, \ldots, (p-1) \cdot a$$

все ненулевые остатки при делении на p содержатся по одному разу.
(b) Из того, что произведение остатков в одинаковых наборах дают одинаковые остатки, выведите малую теорему Ферма.

3. Отметим на бумаге произвольным образом $(p-1)$ точку. Каждой точке сопоставим какой-то ненулевой остаток при делении на p. Проведем из остатка k стрелочку в остаток ka.
(a) Убедитесь, что из каждой точки выходит одна стрелочка, и в кажду точку входит одна стрелочка.
(b) Поймите, что тогда все точки разбиваются на циклические маршруты.
(c) Докажите, что у всех циклических маршртутов одна и та же длина и она делит $(p-1)$.
(d) Выведите отсюда малую теорему Ферма.

Определение. Пусть n — натуральное число. Обозначим $\varphi(n)$ количество чисел, не превосходящих n, взаимно простых с n. Функция $\varphi(n)$ называется *функцией Эйлера*.

Теорема Эйлера. Пусть n — натуральное число, a — взаимно простое с n. Тогда $(a^{\varphi(n)} - 1)$ делится на n.

4. Найдите $\varphi(p)$, где p простое, $\varphi(100)$, $\varphi(2^l)$, $\varphi(p^k)$.

5. **(a)** Докажите, что если умножить все взаимно простые с n остатки на a (которое с n тоже взаимно просто), то получатся все взаимно простые с n остатки по одному разу.
(b) Проведите рассуждения, аналогичные 2b и докажите теорему Эйлера.
(c) Проведите рассуждения, аналогичные задаче 3 и докажите теорему Эйлера другим способом.

6. Докажите, что $(n^{561} - n)$ делится на 561.

7. **(a)** Докажите, что $(n^{84} - n^4)$ делится на 6800 для любого натурального n.
(b) Можно ли вместо 6800 доказать для какого-то большего числа?

8. Докажите, что $2^{3^k} + 1$ делится на 3^{k+1}.

9. **(a)** Пусть p и q — два различных простых числа. Докажите, что $\varphi(pq) = (p-1)\cdot(q-1)$.

(b) Докажите, что если a и b взаимно просты, то $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

(c) Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ (предполагаем, что все p_i различны). Чему равно $\varphi(n)/n$?

source:algebra/number-theory/eulers-theorem-g9r2.tex

Показатели

Определение. Зафиксируем взаимно простые числа a и n. Пусть d — наименьшее такое натуральное число, что $(a^d - 1)$ делится на n. Число d называется *показателем a по модулю n*.

1. **(a)** Пусть d — показатель a по модулю n. Пусть $a^l \equiv 1 \pmod{n}$. Докажите, что $d \mid l$.
(b) Докажите, что $a^s \equiv a^r \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $s \equiv r \pmod{d}$.

2. Докажите, что показатель любого числа по модулю n (взаимно простого с n, конечно) делит $\varphi(n)$.

3. Докажите, что если $a > 1$, то n делит $\varphi(a^n - 1)$.

4. **(a)** Пусть p — простое число. Докажите, что любой простой делитель числа $(a^p - 1)$ или делит $(a - 1)$ или имеет вид $2px + 1$.
(b) Выведите отсюда, что простых чисел вида $2pk + 1$ бесконечно много.

5. **(a)** Докажите, что любой нечетный простой делитель числа $a^{2^k} + 1$ имеет вид $2^{k+1}x + 1$.
(b) Докажите, что простых чисел вида $2^{k+1}x + 1$ бесконечно много.

6. Пусть p и q — простые числа, большие 5. Докажите, что если $p \mid 2^q + 3^q$, то $q < p$.

7. Докажите, что если $n > 1$, то $(2^n - 1)$ не делится на n.

8. Сколько различных остатков принимают степени двойки при делении на 3^k?

source:algebra/number-theory/exponent-g9r2.tex

Две пересекающиеся окружности

1. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B, а через точку Q — секущая, которая пересекает окружности в точках C и D соответственно. Докажите, что:
(a) $\angle AQB = \angle CPD$; **(b)** $AC \parallel BD$;
(c) $AC = BD$ тогда и только тогда, когда $AB \parallel CD$.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена секущая, которая пересекает окружности в точках C и D. Через точки C и D проведены касательные к окружностям, которые пересекаются в точке E. Докажите, что:
(a) четырехугольник $BCED$ — вписанный;
(b) величина $\angle CED$ не зависит от выбора секущей.

3. На хорде AB окружности с центром O выбрана произвольная точка C. Через точки A, O и C проведена окружность, которая пересекает данную окружность в точке D. Докажите, что треугольник BCD — равнобедренный.

4. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая пересекает эти окружности последовательно в точках A, B, C и D. Докажите, что $\angle APB = \angle CQD$.

5. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольника AQB.

6. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через произвольную точку X первой окружности проведена прямая XA, которая пересекает вторую окружность в точке Y и прямая XB, которая пересекает вторую окружность в точке Z. Докажите, что:
(a) прямая YZ перпендикулярна диаметру первой окружности, проведенному через точку X;
(b) высоты всех таких треугольников XYZ, проведенные из точки X, пересекаются в одной точке;
(c) биссектрисы всех таких треугольников XYZ, проведенные из точки X, пересекаются в одной точке.

7. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Общая касательная к этим окружностям касается их в точках A и B. Докажите, что:
(a) прямая PQ пересекает отрезок AB в его середине;
(b) равны радиусы окружностей, описанных около треугольников APB и AQB;
(c) окружность, описанная около одного из этих треугольников, проходит через ортоцентр другого треугольника.

source:geometry/intersecting-circle-pair.tex

Разнобой-повторение

1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пусть H_A, H_B, H_C, H_D — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Докажите, что
(a) $H_AH_B = AB$; **(b)** $H_AH_BH_CH_D$ — четырехугольник, равный $ABCD$.

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пусть I_A, I_B, I_C, I_D — центры вписанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Докажите, что $I_AI_BI_CI_D$ — прямоугольник.

3. На окружности зафиксированы точки A и B. Точка C движется по дуге окружности.
(a) Докажите, что точка I_a пересечения биссектрис внешних углов B и C треугольника ABC движется по дуге некоторой окружности.
(b) Укажите центр окружности, по которой движется точка I_a.

4. Из точки пересечения A двух окружностей одновременно с одинаковыми угловыми скоростями стартовали два велосипедиста, оба против часовой стрелки. Докажите, что середина отрезка, их соединяющего, движется по окружности.

5. Дан треугольник ABC; из точек A и C одновременно с равными скоростями стартуют две мухи в сторону точки B.
(a) Укажите точку, от которой они постоянно равноудалены.
(b) Докажите, что середина отрезка между мухами движется по прямой, параллельной биссектрисе угла B.

6. Даны два квадрата $ABCD$ и $AEFG$ с общей вершиной A, вершины указаны против часовой стрелки. Докажите, что прямые BE, CF и DG пересекаются в одной точке и найдите углы между этими прямыми.

7. Докажите, что вершины A и B остроугольного треугольника ABC, ортоцентр H, а также проекция H на медиану из вершины C лежат на одной окружности.

source:geometry/mixture-g9/r2.tex

Передвижение точек

1. Две мухи ползут по сторонам угла с одинаковой постоянной скоростью. В какой-то момент они оказались на одинаковом расстоянии от некоторой точки A на биссектрисе угла. Докажите, что они либо все время от нее равноудалены, либо этого больше никогда не произойдет.

2. Точки A и B движутся с постоянными равными скоростями по двум пересекающимся прямым. Докажите, что можно указать две точки C и D такие, что в каждый момент времени точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

3. Две равные окружности пересекаются в точках A и B. Точка C движется по одной окружности, а точка D — по другой. При этом прямые CD и AB перпендикулярны и точки A, B, C и D не являются вершинами выпуклого четырехугольника. Докажите, что длина отрезка CD не меняется, и D — точка пересечения высот треугольника ABC.

4. На окружности зафиксированы точки A и B. Точка C движется по дуге окружности.
(a) Докажите, что точка I пересечения биссектрис треугольника ABC тоже движется по дуге некоторой окружности.
(b) Укажите центр окружности, по которой движется точка I.

5. Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности против часовой стрелки. При этом угловые скорости у них одинаковые. Докажите, что прямая, соединяющая их, все время проходит через точку B.

6. Велосипедисты едут по двум концентрическим окружностям с центром O с одинаковыми угловыми скоростями против часовой стрелки. В начальный момент их положения A_1 и B_1 таковы, что $OA_1 \perp A_1B_1$. Докажите, что если в какой-то момент они располагаются в точках A_2 и B_2, то A_1A_2 делит B_1B_2 пополам.

7. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности один по часовой стрелке, другой — против. Угловые скорости у них одинаковые. Четырехугольник AO_1CO_2 — параллелограмм. Докажите, что велосипедисты постоянно равноудалены от точки C.

8. **(a)** На прямой лежат три точки A, B, C. X и Y — точки на плоскости такие, что $AX = XB$ и $BY = YC$. Пусть $BXZY$ — параллелограмм. Докажите, что $AZ = CZ$.
(b) Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности против часовой стрелки. При этом угловые скорости у них одинаковые. Докажите, что существует точка, постоянно равноудаленная от велосипедистов.

source:geometry/moving-points-g9r1.tex

Четырехугольник с перпендикулярными диагоналями

1. Дан четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что существует четырехугольник с такими же длинами сторон и двумя прямыми углами.

2. Дан шестиугольник $ABCDEF$, в котором углы A и C — прямые, $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Докажите, что его диагонали BE и DF перпендикулярны.

Во всех остальных задачах (кроме задачи 7c) рассматривается выпуклый четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность с центром O. Его диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P.

3. Докажите, что в таком четырехугольнике $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.

4. Докажите, что расстояние от точки O до стороны AB равно половине длины CD.

5. Через вершины вписанного четырехугольника проведены касательные к его описанной окружности. Докажите, что точки их попарного пересечения являются вершинами вписанного четырехугольника тогда и только тогда, когда диагонали исходного четырехугольника взаимно перпендикулярны.

6. Докажите, что прямая, проведенная из точки P перпендикулярно стороне BC, делит сторону AD пополам.

7. **(a)** Докажите, что $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 4R^2$, где R — радиус окружности, описанной около данного четырехугольника.
   (b) Найдите сумму квадратов сторон этого четырехугольника, если дан радиус R.
   (c) Докажите, что если четырехугольник с перпендикулярными диагоналями является описанным, то он симметричен относительно одной из его диагоналей.

8. **(a)** Докажите, что середины сторон данного четырехугольника лежат на одной окружности.
   (b) Докажите, что проекции точки P на стороны четырехугольника (основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны) лежат на той же окружности.
   (c) Докажите, что точка P является центром окружности, вписанной в четырехугольник, вершинами которого являются проекции точки P на стороны $ABCD$.
   (d) Докажите, что стороны четырехугольника, образованного проекциями точки P на стороны $ABCD$ (см. пункты 8b и 8c), параллельны сторонам четырехугольника, образованного попарным пересечением касательных в вершинах четырехугольника ABCD (см. задачу 5).

source:geometry/quadrilateral-with-perp-diagonals.tex

Глава 5

Саранча (9-1)

Две пересекающиеся окружности

1. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B, а через точку Q — секущая, которая пересекает окружности в точках C и D соответственно. Докажите, что:
(a) $\angle AQB = \angle CPD$; **(b)** $AC \parallel BD$;
(c) $AC = BD$ тогда и только тогда, когда $AB \parallel CD$.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена секущая, которая пересекает окружности в точках C и D. Через точки C и D проведены касательные к окружностям, которые пересекаются в точке E. Докажите, что:
(a) четырехугольник $BCED$ — вписанный;
(b) величина $\angle CED$ не зависит от выбора секущей.

3. На хорде AB окружности с центром O выбрана произвольная точка C. Через точки A, O и C проведена окружность, которая пересекает данную окружность в точке D. Докажите, что треугольник BCD — равнобедренный.

4. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая пересекает эти окружности последовательно в точках A, B, C и D. Докажите, что $\angle APB = \angle CQD$.

5. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольника AQB.

6. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через произвольную точку X первой окружности проведена прямая XA, которая пересекает вторую окружность в точке Y и прямая XB, которая пересекает вторую окружность в точке Z. Докажите, что:
(a) прямая YZ перпендикулярна диаметру первой окружности, проведенному через точку X;
(b) высоты всех таких треугольников XYZ, проведенные из точки X, пересекаются в одной точке;
(c) биссектрисы всех таких треугольников XYZ, проведенные из точки X, пересекаются в одной точке.

7. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Общая касательная к этим окружностям касается их в точках A и B. Докажите, что:
(a) прямая PQ пересекает отрезок AB в его середине;
(b) равны радиусы окружностей, описанных около треугольников APB и AQB;
(c) окружность, описанная около одного из этих треугольников, проходит через ортоцентр другого треугольника.

source:geometry/intersecting-circle-pair.tex

Две пересекающиеся окружности

Дополнительные задачи

8. Четыре попарно пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности.

9. Точки A', B' и C' лежат на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC соответственно. На отрезках AA', BB' и CC' как на диаметрах построены окружности. Докажите, что прямые, содержащие общие хорды каждой пары окружностей, пересекаются в ортоцентре треугольника.

10. Одна окружность проходит через вершины A и C прямоугольника $ABCD$, а другая — через вершины B и D. Докажите, что их общая хорда проходит через центр прямоугольника.

source:geometry/intersecting-circle-pair-more.tex

Разнобой-повторение

1. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пусть H_A, H_B, H_C, H_D — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Докажите, что $H_AH_BH_CH_D$ — четырехугольник, равный $ABCD$.

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пусть I_A, I_B, I_C, I_D — центры вписанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB и ABC соответственно. Докажите, что $I_AI_BI_CI_D$ — прямоугольник.

3. На окружности зафиксированы точки A и B. Точка C движется по дуге окружности.
   (a) Докажите, что точка I_a пересечения биссектрис внешних углов B и C треугольника ABC движется по дуге некоторой окружности.
   (b) Укажите центр окружности, по которой движется точка I_a.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Опишите взаимное расположение 16-ти центров вписанных и вневписанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB и ABC.

5. Дан треугольник ABC; из точек A и C одновременно с равными скоростями стартуют две мухи в сторону точки B.
   (a) Укажите точку, от которой они постоянно равноудалены.
   (b) Докажите, что середина отрезка между мухами движется по прямой, параллельной биссектрисе угла B.

6. Даны два правильных семиугольника с общей вершиной. Вершины каждого семиугольника нумеруются цифрами от 1 до 7 по часовой стрелке, причем в общей вершине ставится 1. Вершины с одинаковыми номерами соединены прямыми. Докажите, что полученные шесть прямых пересекаются в одной точке.

7. $ABCD$ — вписанный четырехугольник. M — точка пересечения его диагоналей. Некоторая прямая, проходящая через точку M, пересекает окружность, описанную около $ABCD$, в точках M_1 и M_2, и окружности, описанные около треугольников ABM и CDM, в точках N_1 и N_2. Докажите, что $M_1N_1 = M_2N_2$.

source:geometry/mixture-g9/r1.tex

Передвижение точек

1. Две мухи ползут по сторонам угла с одинаковой постоянной скоростью. В какой-то момент они оказались на одинаковом расстоянии от некоторой точки A на биссектрисе угла. Докажите, что они либо все время от нее равноудалены, либо этого больше никогда не произойдет.

2. Точки A и B движутся с постоянными равными скоростями по двум пересекающимся прямым. Докажите, что можно указать две точки C и D такие, что в каждый момент времени точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

3. Две равные окружности пересекаются в точках A и B. Точка C движется по одной окружности, а точка D — по другой. При этом прямые CD и AB перпендикулярны и точки A, B, C и D не являются вершинами выпуклого четырехугольника. Докажите, что длина отрезка CD не меняется, и D — точка пересечения высот треугольника ABC.

4. На окружности зафиксированы точки A и B. Точка C движется по дуге окружности.
   (a) Докажите, что точка I пересечения биссектрис треугольника ABC тоже движется по дуге некоторой окружности.
   (b) Укажите центр окружности, по которой движется точка I.

5. Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности против часовой стрелки. При этом угловые скорости у них одинаковые. Докажите, что прямая, соединяющая их, все время проходит через точку B.

6. Велосипедисты едут по двум концентрическим окружностям с центром O с одинаковыми угловыми скоростями против часовой стрелки. В начальный момент их положения A_1 и B_1 таковы, что $OA_1 \perp A_1B_1$. Докажите, что если в какой-то момент они располагаются в точках A_2 и B_2, то A_1A_2 делит B_1B_2 пополам.

7. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности один по часовой стрелке, другой — против. Угловые скорости у них одинаковые. Четырехугольник AO_1CO_2 — параллелограмм. Докажите, что велосипедисты постоянно равноудалены от точки C.

8. **(a)** На прямой лежат три точки A, B, C. X и Y — точки на плоскости такие, что $AX = XB$ и $BY = YC$. Пусть $BXZY$ — параллелограмм. Докажите, что $AZ = CZ$.
   (b) Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A одновременно стартуют два велосипедиста. Каждый из них едет по своей окружности против часовой стрелки. При этом угловые скорости у них одинаковые. Докажите, что существует точка, постоянно равноудаленная от велосипедистов.

Четырехугольник с перпендикулярными диагоналями

1. Дан четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что существует четырехугольник с такими же длинами сторон и двумя прямыми углами.

2. Дан шестиугольник $ABCDEF$, в котором углы A и C — прямые, $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Докажите, что его диагонали BE и DF перпендикулярны.

Во всех остальных задачах (кроме задачи 7c) рассматривается выпуклый четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность с центром O. Его диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P.

3. Докажите, что в таком четырехугольнике $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.

4. Докажите, что расстояние от точки O до стороны AB равно половине длины CD.

5. Через вершины вписанного четырехугольника проведены касательные к его описанной окружности. Докажите, что точки их попарного пересечения являются вершинами вписанного четырехугольника тогда и только тогда, когда диагонали исходного четырехугольника взаимно перпендикулярны.

6. Докажите, что прямая, проведенная из точки P перпендикулярно стороне BC, делит сторону AD пополам.

7. **(a)** Докажите, что $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 4R^2$, где R — радиус окружности, описанной около данного четырехугольника.
   (b) Найдите сумму квадратов сторон этого четырехугольника, если дан радиус R.
   (c) Докажите, что если четырехугольник с перпендикулярными диагоналями является описанным, то он симметричен относительно одной из его диагоналей.

8. **(a)** Докажите, что середины сторон данного четырехугольника лежат на одной окружности.
   (b) Докажите, что проекции точки P на стороны четырехугольника (основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны) лежат на той же окружности.
   (c) Докажите, что точка P является центром окружности, вписанной в четырехугольник, вершинами которого являются проекции точки P на стороны $ABCD$.
   (d) Докажите, что стороны четырехугольника, образованного проекциями точки P на стороны $ABCD$ (см. пункты 8b и 8c), параллельны сторонам четырехугольника, образованного попарным пересечением касательных в вершинах четырехугольника ABCD (см. задачу 5).

source:geometry/quadrilateral-with-perp-diagonals.tex

Четырехугольник с перпендикулярными диагоналями

Дополнительные задачи

1. Существует ли вписанный четырехугольник с попарно различными целочисленными длинами сторон, у которого длины диагоналей, площадь и радиус описанной окружности — целые числа?

2. На сторонах четырехугольника $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями во внешнюю сторону построены подобные треугольники ABM, CBP, CDL и ADK (соседние ориентированы по-разному). Докажите, что $PK = ML$.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $AC \perp BD$, $\angle BCA = 10^\circ$, $\angle BDA = 20^\circ$, $\angle BAC = 40^\circ$. Найдите $\angle BDC$.

source:geometry/quadrilateral-with-perp-diagonals-more.tex